Matematica III

Docente: Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni, A.A. 2021/2022

Esercitazione 4

Esercizio 1. Calcolare
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$
nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = (x+y)^2 + \pi^e$, $(x_0, y_0) = (2,1)$, $v = (0,-1)$

(b) $f(x,y) = ye^{x^2} + \sin(xy)$, $(x_0, y_0) = (0,1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(c) $f(x,y) = -x \displaystyle\int_1^y \frac{dt}{\sqrt{3+t^4}} + 2\log x$, $(x_0, y_0) = (1,1)$, v versore della retta $y = 2x-1$ orientata nel verso delle x crescenti

Esercizio 2. Siano $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un generico versore e
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ e dedurre che f non è differenziabile.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x,y) = x\sin y$, determinare per quali versori $v \in \mathbb{R}^2$ risulta
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 0.$$

Esercizio 4. Mostrare che non esiste alcuna funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che
$$f_x(x,y) = \big(1+y^2\big)^x \log(1+y^2)\,, \quad f_y(x,y) = 2xy\big(1+y^2\big)^x.$$

Esercizio 5. Determinare, se esiste, la funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che
$$f_x(x,y) = (4x^3+1)y\,, \quad f_y(x,y) = x^4 + x + 2y \quad f(0,0) = 1.$$

Esercizio 6. Una funzione di N variabili si dice armonica in un insieme aperto A se ammette derivate seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e se esse soddisfano l'equazione alle derivate parziali (detta *equazione di Laplace*)
$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{in } A.$$
Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro insieme di definizione:

(a) $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin(x_2)$

(b) $u(x_1, x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2)$

(c) $u(x_1, x_2) = \arctan \dfrac{x_2}{x_1}$

(d) $u(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

(e) $u(x) = u(x_1, \ldots, x_N) = \dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}$